

What's fun in EE

臺大電機系科普系列

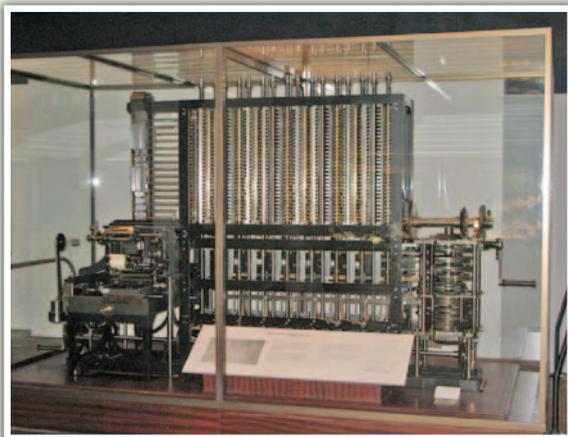
日常生活的邏輯設計

李建模／臺大電機系教授

西元十九世紀，英國科學家巴貝奇（Charles Babbage, 1791 ~ 1871）設計出機械式差分器（Difference engine），能夠貯存和運算，被視為現代電腦的先驅。西元 1946 年，第一部電子計算機 ENIAC 誕生，之後隨著科技的突飛猛進，積體電路與電腦現世，人類的生活也邁進數位化的時代，相機也有了數位相機，電視也出現了數位電視，就連寵物也有電子雞。然而數位化究竟帶給我們什麼好處呢？

讓我們來比較一下數位系統（Digital system）和過去的類比系統（analog system）的差別，對於麥克風來說類比系統是直接以聲波的波形做儲存、處理、傳遞，數位系統則是將聲波轉成一串由 0 和 1 組成的資料來作處理。這帶給我們一些優點：

- (1) 運算較為精確：當我們要對訊號放大 2 倍時，對於數位系統來說，是把 0010（表示 2）放大成 0100（表示 4），而類比系統則是需要將 2 伏特的電壓輸入電晶體放大器中，這過程很可能因為電晶體本身的特性（如溫度影響）而造成誤差，我們得到的結果可能會變成 3.9V 或 4.2V。
- (2) 不容易被雜訊干擾：一個數位系統其輸出只會有代表 1 的高電壓和代表 0 的低電壓，如 5V 和 0V，即使有一點雜訊，系統只要會分辨這是高或低電壓，一樣能得到正確的結果。
- (3) 儲存容易：數位系統只需要儲存 0 和 1 兩種資料類型，電壓的「高」和「低」、光的「有」和「無」等等都能拿來作為儲存的媒介。



圖一 差分器（圖片擷取自網路）

要設計一個數位系統需要系統設計、電路設計、邏輯設計，其中如何將輸入到輸出之間的關係轉換成電路可以表示的形式，則需要依靠邏輯設計（Logic design）這門學問了。我們來看兩個例子：

「小明要從台北趕回屏東的老家，他可以選擇從台北搭飛機或是高鐵到高雄，再轉車到屏東，或是搭乘火車直達屏東。然而飛機遇上大霧會停飛，高鐵與台鐵遇上颱風會停駛，到底小明能不能順利回到家呢？」

「小華家有爸爸、媽媽、小華和妹妹共四個人。他們家決定晚餐的方法是：如果父母意見一致，就照父母的意思，如果父母的意見不同，就問問兩兄妹的意見。如果連兄妹兩人的意見都不同，最後就以爸爸的意見為主。今晚他們家要決定吃不吃火鍋，四人的抉擇和最後的決定之間有什麼關係？」

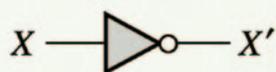
像這兩個情形，我們可以設計電路來解決這些問題。不過在這之前，我們得先學習一點簡單的邏輯設計。

布林代數

邏輯設計的運算是採用布爾（George Boole, 1815 ~ 1864）所發展出來的布林代數（Boolean algebra）運算，但是第一個把布林代數拿來用在電路的卻是被稱為「資訊理論之父」的夏農（Claude Shannon, 1916 ~ 2001），在這邊讓我們先來學一些基本的布林代數運算吧。

首先介紹布林變數（Boolean variable），如 X、Y 等，他們的值只能是代表『真』（True, 邏輯 1）或是代表『假』（False, 邏輯 0）。一個布林變數可以表示一個二元的事件，如：X = 1 代表「今天會下雨」，反之 X = 0 代表「今天不會下雨」。接著我們來看看如何用邏輯電路對這些變數做運算：

(1) NOT：這個運算我們可以將它想成是「相反」的意思，邏輯 1 經過 NOT 運算後，會變成邏輯 0。反之，邏輯 0 經過 NOT 運算後，會變成邏輯 1。舉例來說：X = 1 「今天會下雨」，經過 NOT 運算，變成「今天不會下雨」。在電路符號中，我們可以將 NOT 運算表示為一三角形及一個圓圈。在布林變數中，X 經過 NOT 運算後記為 X'。



我們可以用『真值表』列舉出所有輸入輸出關係。X 為其輸入，而 X' 為其輸出。

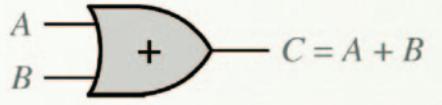
X	X'
1	0
0	1

(2) AND：這個運算是「且」的意思，記成「·」。舉例來說：對一台自動販賣機，A = 1 代表「投錢」，B = 1 代表「按下按鍵」，C = 1 代表「拿到飲料」，他們的關係會是 C = A · B 或是直接記成 C = AB。當我們投錢「且」按下按鍵時，才能拿到飲料，只要 A 或是 B 其中一個動作沒做，則 C 就不會成立。AND 電路符號及真值表，如圖所示。

A	B	AB	C = A · B	
0	0	00	0	不投幣，不按按鍵 → 沒有飲料
0	1	01	0	不投幣，只按按鍵 → 沒有飲料
1	0	10	0	投幣，不按按鍵 → 沒有飲料
1	1	11	1	投幣，按下按鍵 → 拿到飲料



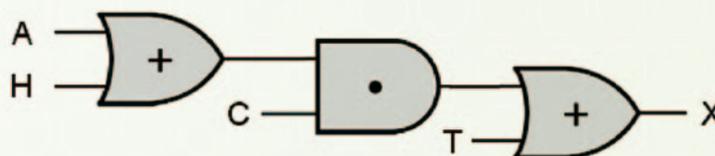
(3) OR：代表「或」的運算，記成「+」。在午餐時間，A 代表「吃飯」，B 代表「吃麵」，C 代表「吃飽」，我們記成 $C = A + B$ 。當我們想要吃飽，只要選擇吃飯「或」吃麵其中一項，當然如果你是大胃王兩個都選，當然能夠吃得飽飽飽。OR 電路符號及真值表，如圖所示。

	AB	$C = A + B$	
	00	0	不吃飯，不吃麵 → 餓肚子
	01	1	吃麵不吃飯 → 飽!!
	10	1	吃飯不吃麵 → 飽!!
	11	1	吃飯也吃麵 → 飽!!

有了這些觀念我們再回頭來看第一個小明要回家的例子，我們令 $A = 1$ 表示為「搭到飛機」， $H = 1$ 為「搭到高鐵」， $C = 1$ 為「從高雄到屏東順利轉車」， $T = 1$ 為「搭到火車」， $X = 1$ 則代表「小明順利回家」。

當小明想要 $X = 1$ 成立（順利回家）時，需要 $A = 1$ （搭飛機）「或」 $H = 1$ （搭高鐵）成立，「且」 $C = 1$ （轉車）也成立；「或是」 $T = 1$ （搭火車）成立。我們可以得到布林代數表示式： $X = T + C(A + H)$

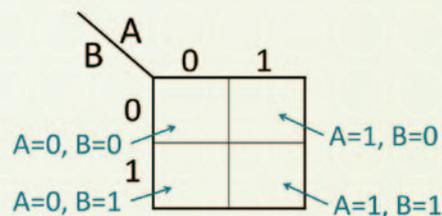
畫成電路圖則是



然而這種做法要解決第二個問題似乎有點困難，因此我們還需要其他方法。

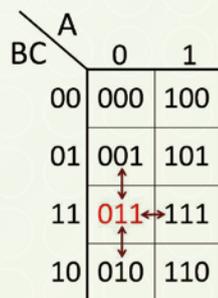
卡諾圖 (Karnaugh Map)

「如何簡單的找出輸入與輸出之間的關係？」，這個問題我們可以靠卡諾圖 (Karnaugh map) 來解決。卡諾圖是在 1953 年由卡諾 (Maurice Karnaugh) 所發明的，算是真值表的一種變形，在卡諾圖中填滿結果的真假值後，依照一定的規則圈選，可以簡單而有效的化簡邏輯函數，找出輸入與輸出的關係式。兩個變數 AB 的卡諾圖如圖二，左半邊代表 $A = 0$ ，右半邊代表 $A = 1$ ；而上半部代表 $B = 0$ ，下半部代表 $B = 1$ 。

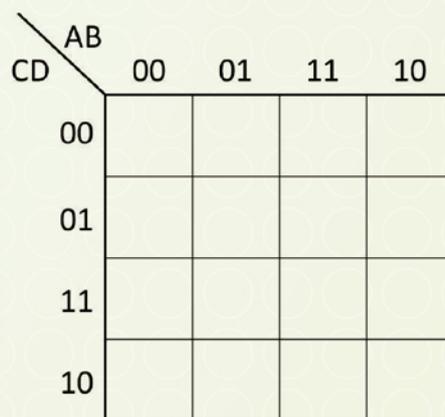


圖二 兩個變數的卡諾圖

三個變數的卡諾圖如圖三，注意到左側 bc 的順序了嗎？00、01、11、10，這是為了讓第 2、3 列之間與 3、4 列之間各只變動一個變數。如此一來第 1、2 列代表 B' ，第 3、4 列 B 。1、4 列代表 C' ，2、3 列則為 C 。同樣道理，我們可以得到四個變數的卡諾圖。



圖三 三個變數的卡諾圖，注意 011 與周圍格子的關係



圖四 四個變數的卡諾圖



因此現在我們回到第二個小華家的問題，我們假設 $A = 1$ 是爸爸要吃火鍋， $B = 1$ 是媽媽要吃火鍋， $C = 1$ 是小華要吃火鍋， $D = 1$ 是妹妹要吃火鍋， $X = 1$ 則為最後決定要吃火鍋。根據故事我們可以得到這樣的真值表，其中橫線表示 0 或 1 皆可以。我們將結果填入卡諾圖。

A	B	C	D	X
0	0	-	-	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	-	-	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

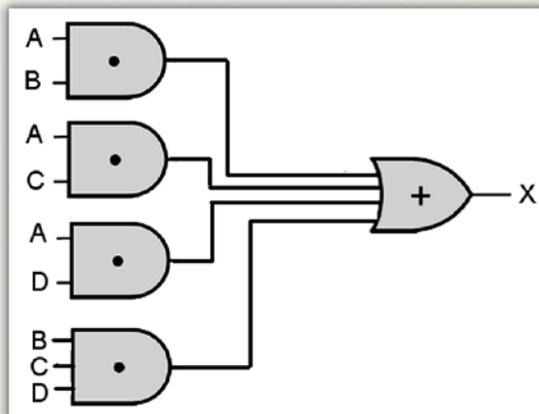
圖五 根據問題二我們所得到的真值表與卡諾圖

填好了表格，接著就得來了解一下圈選的規則：

- (1) 圈選相鄰同樣為 1 的格子，盡可能的畫出大圈，但是只能為 2^n 項（如 2, 4, 8, ……）的圈。
- (2) 左右兩相鄰格可以圈一起，代表兩相鄰格差異的變數沒有影響。同理，上下兩邊亦可以圈一起。但是斜邊格不可以圈一起。
- (3) 所有是 1 的格子都必須被選到一次。
- (4) 圈數必須盡可能的少

在卡諾圖上，我們可以得到四個大圈圈，其中 $AB = 11$ 的圈圈代表 AB 因為 CD 的值都沒有影響，意思是如果父母意見一致，就照父母的意思。

其他圈圈同理類推，因此我們可以得到 $X = AB + AC + AD + BCD$ 的關係式，畫成電路圖如下



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

Diagram showing four prime implicants circled in red and blue on the Karnaugh map: a vertical circle for AB, a horizontal circle for BCD, a vertical circle for AD, and a vertical circle for AC.

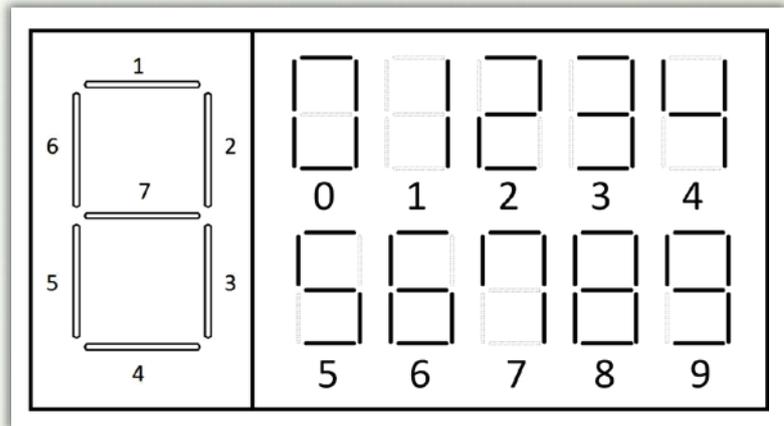
圖六 根據規則圈選後的卡諾圖



再舉一個例子。我們日常生活中到處可見的七段顯示器，當中的每一個發光線段，我們都可以利用卡諾圖簡單地就找出他們與輸入的關係。輸入數字以二進位 DCBA 表示，例如數字一 DCBA = 0001，數字二 DCBA = 0010，數字八 DCBA=1000 等等。對每一個線段，我們可以找出關係式如圖，同學們可以自己試試看。



圖七 七段顯示器 (擷取自網路)



圖八 七段顯示器與各數字表示法

表一 七段顯示器各數字的二進位表示與所使用的線段

數字	ABCD	線段
0	0000	1,2,3,4,5,6
1	0001	2,3
2	0010	1,2,4,5,7
3	0011	1,2,3,4,7
4	0100	2,3,6,7
5	0101	1,3,4,6,7
6	0110	1,3,4,5,6,7
7	0111	1,2,3,6
8	1000	1,2,3,4,5,6,7
9	1001	1,2,3,4,6,7

表二 七段顯示器各線段的布林函數表示

線段	用到的數字	布林函數
1	0,2,3,5,6,7,8,9	$A+C+BD+B'D'$
2	0,1,2,3,4,7,8,9	$B'+C'D'+CD$
3	0,1,3,4,5,6,7,8,9	$B+C'+D$
4	0,2,3,5,6,8,9	$A+B'C+B'D'+CD'+BC'D$
5	0,2,6,8	$B'D'+CD'$
6	0,4,5,6,7,8,9	$A+B+C'D'$
7	2,3,4,5,6,8,9	$A+BC'+B'C+CD'$

以上這些便是邏輯設計所要做的事，將輸入到輸出之間的布林代數關係找出來，進一步就可以設計電路。邏輯設計是一門有趣的學問，所有的數位系統都需要靠它來找出輸出端與輸入端之間應該要如何處理。它使用簡單的邏輯運算，設計出許多複雜的大型電路。因此，當我們以後見到這些電子產品時，不妨去想想他們背後是如何設計的，你會發現很多產品背後的原理會是意想不到的單純。

