

# What's fun in EE

臺大電機系科普系列

## 從電機系學到的事

王易凡／臺大電機工程系助教、電信所博士生

大家目前應該是高中生，之後會遇到選系的問題，應該選自己擅長的、有興趣的？還是未來有發展的系？這個答案或許同學必須自己去找適合自己的答案。不過確定的是，若能對這些系所學的內容稍微有些了解，對於未來選系或許會有幫助。甚至透過這些了解，產生了對這個系的興趣。這篇文章將會跟大家分享一些我在電機系學習到也適合和大家分享的一些事，並簡介一個無線通訊系統的應用，希望能讓大家更加認識電機系，甚至激發大家對電機系的興趣。

我目前是電機系的專任助教，主要是教大學部一門數位電路實驗課程（設計FPGA 電路板），也是電信所博士班的學生，大學時期也是念電機系，所以在電機領域有一段時間了，在這段過程中，我覺得電機系就是在開發一些工程系統或產品，以便利人類的生活或是解決一些人類碰到的問題，讓人們可以有更幸福的生活。且在這段學習過程中，我們可以從專業科目中學習到，以前的人是怎樣設計系統的，怎樣解決一些工程問題，我們可以站在巨人的肩膀上，看看他（她）們是如何思考的。甚至，我們還必須自己來動手設計系統。當然，一開始我們設計的系統，可能功能不完全，或甚至功能是錯的，所以我們又要開始找問題在哪，並且不斷修改，直到達到應有的功能，這樣的過程電機領域的人稱它為除錯（Debug）。這些都是在電機系（常常）會學到的事情。這樣的過程可以訓練我們嚴謹邏輯思考的能力，並學習到如何除錯與解決問題。而在電機系學到的這種能力，不僅能用在電路設計上，它也能用在我們的生活上，讓我們的生活更幸福，因為我們的人生總是會碰到不少問題，若是我們知道一些解決問題的方法，我們或許能更有智慧地解決人生中的問題，實現我們的夢想。以下將分享我在電機系學到的除錯與解決問題的方法兩個部分，最後再舉一個無線通訊的工程問題作為例子。

要實現一個大的目標，我們可以將這個大目標拆成多個小目標來實現。工程系統也是如此，一個系統（或電路等），我們可以將它拆成很多子系統，透過這些子系統與這些子系統彼此間的連線，組合成一個大的系統，實現我們要求的功能。然而，只要其中任何的子系統或是任何的連線有問題，整個系統就無法正常運作（或達到應有功能）。找出這個系統無法正常運作的過程，我們稱為除錯。

廣義來看，我們可以假設有一個系統是由  $N$  個子系統所組合，並且子系統彼此間有  $L$  個連線，如圖 1。每個子系統與連線都只有兩種可能：正常運作（用 1 表示）與不正常運作（用 0 表示）。因為只要任何一個子系統或連線不正常運作，整個系統就無法正常運作。因此，造成整個系統無法正常運作有  $2^{N+L}-1$  種可能的情況。例如：考慮一個系統由 2 個子系統與 1 條連線所構成，當系統無法正常運作時可能的情況有 7 種可能：000,001,010,011,100,101,110，其中第一個數字代表第一個子系統是否正常運作；第二個數字代表第二個子系統是否正常運作；第三個數字代表連線是否正常運作。當系統再大一點，假設由 10 個子系統與 9 條連結所組成，那麼系統無法正常運作時的可能情況有 524,287 種。因此，當此系統出現問題，到底是 524,287 種情況中的哪一種？若是沒有一個好方法來除錯，就彷彿是在大海撈針一般。

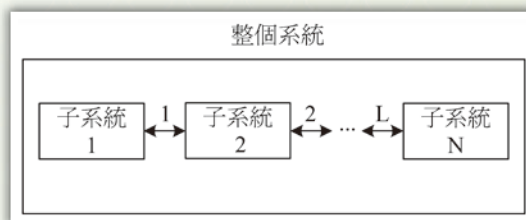


圖 1 由子系統與連線構成的系統示意圖

為了避免大海撈針，除錯最簡單與直接的方式就是直接確認每個子系統與連線都是正確的。唯有每個子系統與連線都是正常運作，整個系統才會正常運作。因此，在除錯時，我們需要去驗證每個子系統與其連線都是正確的，將確定正確的子系統與連線挑出來，驗證剩下不確定的子系統或連線好縮小除錯範圍。如此不斷地縮小範圍，直到最後確認每個子系統與其連線都是正確的。以一個系統由 2 個子系統與 1 條連線構成的為例，唯有是 111，整個系統才能正常運作。因此，我們只需要驗證 2 個子系統與 1 個連線的正確性，即可確保整個系統是正確的。同理，由 10 個子系統與 9 條連結所組成的系統只要驗證 19 個東西的正確性，即可確認整個系統是正確的，避免大海撈針的情況。

接下來分享解決問題的方法。解決問題的意思是要找出解決的方案，並從中挑出一個適當的方案來解決問題。因此，我們先來看看解的種類全部有哪幾種。解可以分為無解與有解兩種，如圖 2。無解代表這個問題的解法不存在，也就是說，不可能有解決這個問題的方法，如果我們發現這個問題是無解的，也是好事一件，代表我們不需要再為了這個問題而煩惱，因為這問題的解不存在。若是這問題是有解的，又可區分為：只有一個解、有限個解（多於一個解，但解的數目為有限個）與無限個解（多於一個解，但解的數目為無限個）。如果這問題的解只有一個，也是好事情，因為代表這問題只有它這唯一的解，不需要花功夫去跟其它解比較哪個比較好。至於，如果解有兩個以上，有分兩類：有限個解與無限個解。有限個解代表解的數目是有限個（可以被數出來），而無限個解代表解的數目是無窮多個（無法被數出來）。若是解是這兩種情況，我們就需要從這些解當中，找出一個適合的解，來作為這個問題的答案。直覺上看來，要從無限個解中挑出一個解似乎比起從有限個解中挑出一個解還難，但有趣的是，有些問題，從無窮多個解中挑出一個解會比從有限個解中挑出一個來的容易。

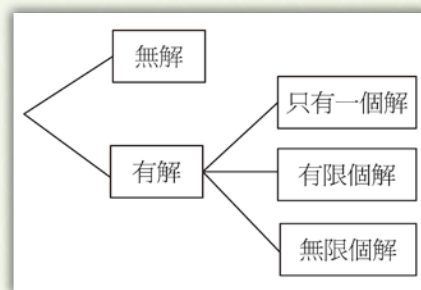


圖 2 解的數目的分類

知道解的數目的種類之後，接下來，我們來看看，要如何挑出適當的解。在處理工程的問題中，問題常會關係到一個或多個目標。例如：在無線通訊的工程問題中，我們關心的目標常是：資料的傳輸量愈大愈好、資料傳送的錯誤率越低越好、電路成本越低越好。並且我們會將這些目標具體地用數字量化。如此一來，挑出適當的解就變成，找出（或稱搜尋）那



個解，使得它能有很好的目標值。在這樣搜尋解的過程中找出的解又可分為兩種：最佳解與次佳解。最佳解的意思是從所有的解當中挑出一個最好的解，使得目標最好，例如：當我們設計一個通訊系統，若目標是使資料傳送的錯誤率越低越好且假設這個問題的解的數目為有限個解或無限個解，則這些解當中，能使資料傳送的錯誤率最低的那個解，即為最佳解。其它不是最佳解的解，但是效果還不錯的（目標值還不錯解），可稱為次佳解。雖然最佳解是最好的解，但在電機領域，不是每個工程問題都會使用最佳解，因為在某些情況，最佳解可能不好找或是要花大量的計算時間來找，使得找最佳解的成本非常高，在這種情況，我們常會使用次佳解，因為他的計算時間可能比最佳解來的短，使得次佳解的成本較低，且它的效果或許不是最好的，但卻也可能還不錯。

接下來，我們來介紹一些常見找解的方法。

### 數學分析法

有些問題（包含大部分電機領域的工程問題），可以建立數學模型，並且量化目標來處理，這類的問題，可以透過數學的方式找出最佳解或次佳解。最佳化理論，有提供系統化的知識來處理這類問題，不過這些比較深入，或許不太適合在這邊介紹給大家，但對這些有興趣的同學，或許未來在大學可以修這類的課程。舉一個簡單可以用數學分析法的例子。假設小剛是一間夜市鹹酥雞店的老闆，店裡只賣鹹酥雞跟雞排。製作一份雞排需要 5 分鐘的時間及 15 元的成本，而製作一份鹹酥雞需要一樣 5 分鐘的時間但花 20 元的成本；賣出一份雞排可賺 25 元，而賣出一份鹹酥雞可賺 30 元，並且假設一天開店的成本不得超出 2000 元，且一天總共炸鹹酥雞與雞排的時間不能操過 5 小時（營業時間為 6PM ~ 11PM），那麼小剛應該賣出幾份鹹酥雞跟幾份雞排才能賺最多的錢呢？這個問題是典型的可用數學分析求解的問題，因為這個問題目標是可以被量化的利潤，且這問題也有最佳解，也就是有一組最佳的賣出的鹹酥雞與雞排的數量，能使得利潤最大。而最佳解是多少呢？（埋個伏筆或許大家可以思考看看）

### 決策樹

有的問題是無法用數學分析法來處理（例如：當問題較難用數學式子表達時），在這種情況，決策樹是一種很好用的求解工具。決策樹的求解方式，一開始會先列舉所有可能的選項，然後刪去不太可能的選項，再挑出較為適合的選項。例如：假設小明想在最近買一雙價值 2 千 5 百元的籃球鞋，他的問題可以是：要如何才能在一個月內有足夠的錢，買雙 2 千 5 百元的籃球鞋？我們將這個問題的決策樹表示於圖 3。

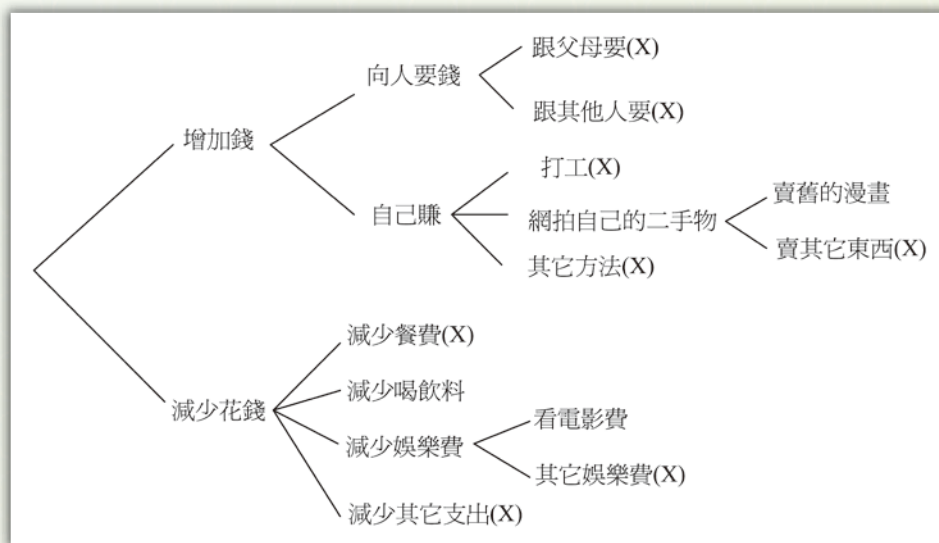


圖 3 買鞋子的決策樹

小明發現要得到 2 千 5 百元只能靠增加錢或是減少花錢來達到，而要增加錢又可分為向人要錢與自己賺兩種方式，但小明決定不要向人要錢，因為這個月已經跟父母超領零用錢了，跟其他人要到錢的機率又不高。自己賺的話，小明想到打工或是去網拍自己不要的二手用品，但小明的成績都是班上前幾名，打工的話可能會讓他的成績受影響，且他又發現他可以賣掉他好幾集舊的火影忍者漫畫，來賺到大約 2000 元。在減少花錢方面，透過決策樹，小明發現不能減少餐費，因為這樣肚子會餓，又不健康。但若是不喝飲料，既不容易發胖，又可以省下一個月 350 元。然而，他發現這樣他還缺 150 元，但慶幸的是，他每個月都會看電影花了 250 元，若是省下電影錢就可買鞋了，而且還多了 100 元。因此小明透過了決策樹，找到了買到這雙鞋的方法。

### 啟發式方法

在某些情況下，要找到最佳解是不容易的，在這種情況，啟發式方法有可能可以提供一個還不錯的次佳解，來解決這個問題。啟發式方法是一種透過特定規則（可能是透過對問題的觀察或是理解，找出一些規則），得到解的方式，這種方式得到的解，不一定是最佳解，卻有可能幫助我們對一個複雜的問題，較快速的找到一個可用的解。我們利用後面的一個無線通訊的例子來說明啟發式方法。

### 盲目搜尋法

盲目搜尋法就是什麼都不管，盡可能的把所有的解都拿來試試看。如果把每個解都試過了，那就可以直接把效果最好的找出來，即是最佳解。但萬一問題有無限個解或是有限個解但解很多，那麼這樣的方法會較沒有效率。另一種盲目搜尋法的方式是，一樣盡可能的把可能的解都試試，但不全部都試完，若發現還不錯的解，就停止。這樣找出的解，可能不是最佳解，而是次佳解，但效果或許能讓人滿意。例如：在前面雞排店的例子，我們可以將所有鹹酥雞跟雞排數量的組合都帶進去算，看看哪一種組合可以得到最大的利潤，雖然用手算，算到天黑都算不完，但透過電腦的計算，還是可以把所有的可能都算出來，然後將利潤最大時的解挑出來，作為最佳解。

接下來我們舉一個無線通訊工程問題的例子。圖 4 是一個經過簡化的無線通訊系統示意圖，傳送端有一根傳送天線將資料  $s$  送到也只是一根天線的接收端。現況的無線通訊採用數位技術，也就是資料可以被轉化成很多 0 與 1 的組合，因此這裡我們假設  $s$  的值是 -1（代表資料 0）跟 1（代表資料 1），資料被傳送之後，因為無線的關係，資料可能會被反射物（如汽車玻璃）反射，或是遮蔽物（如山或樹）阻擋及受到雜訊的影響，在這裡我們稱為通道效應，使得信號可能會失真。因此我們假設接收端收到的信號為  $r$ ，且  $r = h \times s + n$ ，裡面的  $h$  跟  $n$  都是隨機的值（有可能為負值），代表通道效應的影響，例如：假設送出的資料  $s$  是 1，但因為受到牆壁的阻擋信號減弱了 0.7 倍，也就是  $h$  等於 0.7，而此時的雜訊（用  $n$  表示）為 -0.07，那麼此時收到的信號  $r$  就等於 0.63。

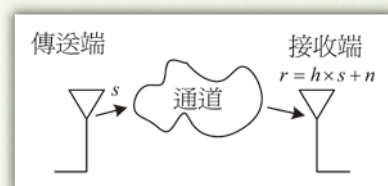
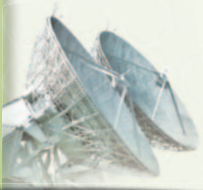


圖 4 無線通訊系統示意圖



而我們這裡考慮的問題是，接收端要如何藉由接收到的信號  $r$  還原出原本的信號  $s$ ？這個問題，如果不知道  $h$  的值，尤其當  $h$  為負值時，問題就麻煩了。所幸，這個問題可以透過通道估測的方法來得到  $h$  的近似值。所以，在這裡我們假設  $h$  也是已知的。那麼，我們先使用啟發式方法來解決這個問題。因為  $h$  已知，所以很簡單的我們可以發現只要把  $r$  除以  $h$ ，我們可以得到  $\hat{s} = \frac{r}{h} = s + \frac{n}{h}$ ，並用  $\hat{s}$  來表示。如果雜訊  $n$  夠小的話，那麼當  $\hat{s}$  大於 0，我們可以猜測  $s$  是 1 的可能性比較高；而當  $\hat{s}$  小於 0 時， $s$  是 -1 的可能性比較高。這樣我們就簡單地得到了還原資料  $s$  的方法。以上面的例子（收到的信號  $r$  等於 0.63 與  $h$  等於 0.7），我們可以得到  $\frac{r}{h}$  等於 0.9 大於 0，因此我們可以猜測  $s$  是 1。

然而，解法不只一種。接下來我們來看這個問題的最佳解。要求最佳解，首先必須先確認要量化的目標是甚麼？在這個問題，假設我們考慮的目標是讓接收端猜測  $s$  的錯誤機率最低（或是正確猜測  $s$  的機率最高）。透過機率與統計的理論，它會等於是找出  $s$  所有可能中讓  $|r - h \times s|$  的值最小的那個  $s$ 。有點繞舌，簡單來說，就是要比較  $|r - h \times -1|$  和  $|r - h \times 1|$  的值，挑出最小的，因為  $s$  的可能值是 -1 跟 1。一樣我們以上例為例（收到的信號  $r$  等於 0.63 且  $h$  等於 0.7），那麼我們可以發現  $|0.63 - 0.7 \times -1| = 1.33$  而  $|0.63 - 0.7 \times 1| = 0.07$ ，因為 0.07 比 1.33 更小，所以最佳解即為  $s = 1$ 。我們可以發現，用最佳解的方式需要計算兩次  $|r - h \times -1|$  與  $|r - h \times 1|$  的值，然而使用啟發式方法只需要計算一次  $\frac{r}{h}$  即可。所以，啟發式方法在計算上較為簡單。事實上，以這個問題來說，可以被證明，最佳解跟啟發式的解是一樣的。

不過如果我們利用最近通訊領域的多天線技術，讓傳送端與接收端都變成兩根天線，那麼最佳解跟啟發式的解就不同了。由於傳送端有兩根天線，我們可以同時送出  $s_1$  與  $s_2$  兩筆資料（同樣的  $s_1$  跟  $s_2$  的值都是 -1 或 1），並可用向量  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$  來表示，而接收端也有兩根天線，因此會收到  $r_1$  與  $r_2$  兩筆資料，並可用向量  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$  來表示。而此時通道效應的影響可表示為矩陣形式

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

或是簡單用  $\mathbf{r} = \mathbf{H} \times \mathbf{s} + \mathbf{n}$  來表示，在這裡反射或阻擋的效應用  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix}$  的矩陣來表示，而雜訊用  $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$  的方式來表示。那麼如同一根天線的情況，啟發式方法的解為計算  $\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{s}$  的值，然後若  $\hat{s}_1$  大於 0，猜測  $s_1$  是 1； $\hat{s}_1$  小於 0，猜測  $s_1$  是 -1， $\hat{s}_2$  也是如此。但若考慮最佳解，必須計算四個  $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right|$ 、 $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|$ 、 $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right|$  與  $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|$  的值，然後挑出最小的，此時的  $s$  即為最佳解。在兩根天線的問題上，可以被證明最佳解可以得到比用啟發式方法的解來的更低猜測  $s$  錯誤的機率，也就是說正確猜出  $s$  的機率更高，然而它的缺點是需要計算四次  $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \mathbf{s} \right|$  的值，而啟發式方法只需要算一次  $\begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{s}$  即可。隨著天線數目增加，計算最佳解的負擔會越來越大，例如到 10 根天線時，最佳解需要計算  $2^{10} = 1024$  次  $\left| \mathbf{r} - \mathbf{H} \times \mathbf{s} \right|$  的值。然而，還有其它次佳化的方法嗎？（也一樣留個伏筆，讓大家想想看）

以上跟大家分享了，我在電機領域學到的一些事，並且舉了一個無線通訊的例子，希望能讓大家對電機系有一些了解。此外，這些除錯或是解決問題的方法，也可以用於日常生活當中，或許可以用來解決自己日常生活的問題，甚至幫助別人解決日常生活的問題，讓自己跟別人都能邁向更幸福的人生。有相關的問題也歡迎來信（或加臉書）：[x1234fff@hotmail.com](mailto:x1234fff@hotmail.com)（雖然很忙時不一定會回信）。另外，大家有看過海賊王（或稱航海王）嗎？像是魯夫或索隆都有橡膠槍與三刀流這些厲害的招數，而在真實世界中，善用邏輯思考解決問題的能力，或許是一種不需要吃惡魔果實就可以做到但又非常利害的技能，準備好邁向偉大的航道了嗎？歡迎大家加入電機系的行列。

